数理解析研究所講究録
140巻 1972年 10-28

多値論理の演算法則と公理との関係について

後藤以紀（明治大学）

1 総説　前回の「多値論理およびその応用」研究会において，「多値論理概説」[1]の中で，多値論理代数方程式の一般解と多値論理の演算法則の例とについて述べたが，今回はその応用例として，二値論理および三値論理の公理系の例を挙げ，その中に含まれる未確定の演算を未知関数とし，公理系を連立論理方程式とみなして解いてみた。

それにより，一つの公理系のうちで，どの公理が演算法則をどの程度決定する働きをするかが明らかに示された。

二値論理の例では，全部の公理を待たずに演算法則が決定される場合があり，三値論理の例では，二値論理と同種の解（演算法則）と，三値論理独特な解と両方求められることが判った。

なお本研究は文部省科学研究費特定研究「情報処理に関する基礎的研究」の一部である。

2 記号　本文に使用している記号は次の通りである。

任意の変項　$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$; A, B, C ; X, Y, Z, U, V.

真理値　　1, 2, 3（三値）; 1, 0（二値）.

ここに，1はT（真）に対応されるが，残り2，3のうちの何れか一つはI（中間値）に対応され，他はF（偽）に対応される。また，2，3をまとめて「1でない真理値」として0で表わすことができる。

変項Aが或る真理値aを有することを

$$A = a \qquad (2.1)!$$

で表わし，これを A_a と書く。即ち

$$A_a \equiv (A = a) \qquad (2.2)!$$

であって，A_a は二値命題として扱う。

二値論理の記号　否定 $\overline{A}$，論理積 AB 又は $A \cdot B$，論理和 $A \vee B$，含意 $A \rightarrow B$，対等 $A \leftrightarrow B$，恒等 $A \equiv B$，$(A \leftrightarrow B \leftrightarrow C) \equiv (A \leftrightarrow B)(B \leftrightarrow C)$.

公理の中の未確定の演算記号　否定（と推定されるもの）$\neg$，論理積（〃）$\cap$，論理和（〃）$\cup$，含意（〃）$\supset$，NAND（〃）$|$.

$$\left.\begin{array}{l} A_1 \vee A_0 \equiv A_1 \vee A_2 \vee A_3 \equiv 1, \quad A_l A_m \equiv 0 \quad (l \neq m), \\ \overline{A_1} \equiv A_0 \equiv A_2 \vee A_3, \ \overline{A_2} \equiv A_1 \vee A_3, \ \overline{A_3} \equiv A_1 \vee A_2. \end{array}\right\} (2.3)!!$$

3 C_2 型の例1（C_2-1）

$$\mathfrak{A}_1(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})_1\to\mathfrak{B}_1\equiv 1. \qquad (3.0)!!!$$

$$[(X\cup X)\supset X]_1\equiv 1, \qquad (3.1)!!!$$

$$[X\supset(X\cup Y)]_1\equiv 1, \qquad (3.2)!!!$$

$$[(X\cup Y)\supset(Y\cup X)]_1\equiv 1, \qquad (3.3)!!!$$

$$[(X\supset Y)\supset\{(Z\cup X)\supset(Z\cup Y)\}]_1\equiv 1. \qquad (3.4)!!!$$

（3．1）乃至（3．4）式の［　］内は公理[2]を表わす。［　］$_1\equiv 1$ は［　］内の論理式の真理値が恒等的に1であることを表わす。

（3．0）式は「推理の原則」に相当するもので，論理式$\mathfrak{A}$と（$\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}$）との真理値が1である場合には，論理式$\mathfrak{B}$の真理値を1と定めることを意味する。

これより，$\supset$及び$\cup$の意味を確定するために

$$\left.\begin{aligned}(A\supset B)_1&\equiv A_1B_1I_{11}\vee A_1B_0I_{10}\vee A_0B_1I_{01}\vee A_0B_0I_{00},\\(A\cup B)_1&\equiv A_1B_1S_{11}\vee A_1B_0S_{10}\vee A_0B_1S_{01}\vee A_0B_0S_{00}.\end{aligned}\right\} \qquad (3.5)!$$

とおき，これを（3.0）乃至（3.4）式に代入して，任意の$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, X, Y, Zに関して成立するための必要充分条件として，I_{11}, I_{10}, I_{01}, I_{00}, S_{11}, S_{10}, S_{01}, S_{00}を定める。

（3．5）第1式で

$$A=\mathfrak{a}=l,\ B=\mathfrak{b}=m \qquad (3.6)!$$

とおき，（３．０）式に代入すると，l，$m=0$，1について，

（３．５）（３．６）→

$$\left[(3.0)\leftrightarrow[\mathfrak{a}_0\vee(\mathfrak{a}\supset\mathfrak{b})_0\vee\mathfrak{b}_1\equiv 1]\right.$$

$$\leftrightarrow\bigwedge_{l,m}[\mathfrak{a}_0\vee\mathfrak{a}_l\mathfrak{b}_m\overline{I}_{lm}\vee\mathfrak{b}_1\equiv 1]$$

$$\left.\leftrightarrow(\overline{I}_{10}\equiv 1)\qquad(3.7)!!\right]$$

が求められる。これで，<u>（３．０）式は，「$\mathfrak{a}$と（$\mathfrak{a}\supset\mathfrak{b}$）とが１であるときに$\mathfrak{b}$が１でないことはない」ことを表わしている。</u>

同様に（３．７），（３．１）式によれば

$$(3.5)\rightarrow\left[\overline{I}_{10}[(3.1)\text{左辺}]\right.$$

$$\leftrightarrow\overline{I}_{10}\bigwedge_{l=0}^{1}[(\mathrm{X}\cup\mathrm{X})_1 I_{1l}\mathrm{X}_l\vee(\mathrm{X}\cup\mathrm{X})_0 I_{0l}\mathrm{X}_l]$$

$$\leftrightarrow\overline{I}_{10}\bigwedge_{l}[S_{ll}I_{1l}\vee\overline{S}_{ll}I_{0l}]$$

$$\left.\leftrightarrow\overline{I}_{10}\overline{S}_{00}I_{00}(S_{11}I_{11}\vee\overline{S}_{11}I_{01})\qquad(3.8)!!\right].$$

同様に（３．２）式によると

$$(3.5)\rightarrow\left[(3.8)[(3.2)\text{左辺}]\right.$$

$$\leftrightarrow\overline{I}_{10}I_{00}\overline{S}_{00}(S_{11}I_{11}\vee\overline{S}_{11}I_{01})\bigwedge_{l,m}(S_{lm}I_{l1}\vee\overline{S}_{lm}I_{l0})$$

$$\leftrightarrow\overline{I}_{10}I_{00}\overline{S}_{00}(S_{11}I_{11}\vee\overline{S}_{11}I_{01})$$

$$\cdot I_{11}S_{11}S_{10}(S_{01}I_{01}\vee\overline{S}_{01}I_{00})(S_{00}I_{01}\vee\overline{S}_{00}I_{00})$$

$$\left.\leftrightarrow I_{11}\overline{I}_{10}(I_{01}\vee\overline{S}_{01})I_{00}S_{11}S_{10}\overline{S}_{00}\qquad(3.9)!!\right].$$

同様に（３．３）式により

（３．５）→［（３．９）［（３．３）左辺］

$$\leftrightarrow I_{11}\overline{I_{10}}(I_{01}\vee\overline{S_{01}})I_{00}S_{11}S_{10}\overline{S_{00}}\bigwedge_{l,m}(S_{lm}S_{ml}I_{11}\vee S_{lm}\overline{S_{ml}}I_{10}\vee\overline{S_{lm}}S_{ml}I_{01}\vee\overline{S_{lm}}\overline{S_{ml}}I_{00})$$

$$\leftrightarrow I_{11}\overline{I_{10}}(I_{01}\vee\overline{S_{01}})I_{00}S_{11}S_{10}\overline{S_{00}}\bigwedge_{l,m}(S_{lm}S_{ml}\vee\overline{S_{lm}}I_{01}\vee\overline{S_{lm}}\overline{S_{ml}})$$

$$\leftrightarrow I_{11}\overline{I_{10}}I_{01}I_{00}S_{11}S_{10}S_{01}\overline{S_{00}} \qquad (3.10)!!]$$

これより

$$[A\supset B]_1=A_0\vee B_1=A_1\rightarrow B_1. \qquad (3.11)!!$$

$$[A\cup B]_1=A_1\vee B_1. \qquad (3.12)!!$$

このようにして，⊃と∪との意味が確定された。これを残りの公理（３．４）式に代入すると，満足するので，公理中の⊃と∪とは（３．１１），（３．１２）両式の通り→，∨と同じであることが判った。

否定は

$$[\neg A\vee B]_1\equiv A_1\rightarrow B_1 \qquad (3.13)!!!$$

の¬で定義することにすれば，

$$(\neg A)_1\equiv A_1N_1\vee A_0N_0 \qquad (3.14)!$$

とおいて（３．１１）式に代入すると，総てのA，Bについて

$$A_0\vee B_1\equiv[\neg A\vee B]_1$$

$$\equiv[\neg A]_1\vee B_1$$

$$\equiv A_1 N_1 \vee A_0 N_0 \vee B_1 。\qquad (3.15)$$

これより

$$\overline{N_1} N_0 \equiv 1 \qquad (3.16)!!$$

が導かれるから，

$$[\neg A]_1 \equiv A_0 \qquad (3.17)!!$$

が決定される。

4 <u>C_2 型の例2</u> (C_2-2)

$$\mathfrak{A}_1(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})_1\to\mathfrak{B}_1\equiv 1. \qquad (4.0)!!![2]$$

$$[(\neg X\supset X)\supset X]_1\equiv 1, \qquad (4.1)!!!$$

$$[X\supset(\neg X\supset Y)]_1\equiv 1, \qquad (4.2)!!!$$

$$[(X\supset Y)\supset\{(Y\supset Z)\supset(X\supset Z)\}]_1\equiv 1. \qquad (4.3)!!!$$

(4.0)乃至(4.3)式に対して

$$(A\supset B)_1\equiv A_1B_1I_{11}\vee A_1B_0I_{10}\vee A_0B_1I_{01}\vee A_0B_0I_{00}, \qquad (4.4)!$$

$$(\neg A)_1\equiv A_1N_1\vee A_0N_0, \qquad (4.5)!$$

と置けば，前と同様にして，(4.0)式からは，

$$\overline{I_{10}}=1 \qquad (4.6)!!$$

が導かれる。(4.4), (4.5)式を(4.1)式に入れて

$(4.4)(4.5)\to[\overline{I_{10}}[(4.1)$ 左辺$]$

$$\leftrightarrow \overline{I_{10}}\bigwedge_{l}(N_lI_{0l}\vee I_{0l}I_{1l}\vee N_lI_{1l})$$

$$\leftrightarrow \overline{I_{10}}N_0I_{00}(N_1I_{01}\vee I_{01}I_{11}\vee N_1I_{11}) \qquad (4.7)!!]$$

$\cdot[(4.7)[(4.2)$ 左辺$]$

$$\leftrightarrow(4.7)\bigwedge_{l,m}[\overline{N_l}(\overline{I_{0m}}I_{l0}\vee I_{0m}I_{l1})\vee N_l(\overline{I_{1m}}I_{l0}\vee I_{1m}I_{l1})]$$

$$\leftrightarrow N_0\overline{N_1}I_{11}I_{01}\overline{I_{10}}I_{00} \qquad (4.8)!!].$$

これにより

$$(A\supset B)_1=A_0\vee B_1,\ (\neg A)_1=A_0. \qquad (4.9)!!$$

これを(4.3)式に入れると1となるので解である。

5 Sheffer 関数型 の例 (S_2)

$$\mathfrak{A}_1\{\mathfrak{A}|(\mathfrak{B}|\mathfrak{L})\}_1 \to \mathfrak{L}_1 \equiv 1. \qquad (5.0)!!!$$

$$[\{X|(Y|Z)\}|[\{U|(U|U)\}|\{(V|Y)|((X|V)|(X|V))\}]]_1$$
$$\equiv 1. \qquad (5.1)!!!$$

ここに(5.0)式は推理の原則に相当し，(5.1)式は公理である。[3][4]

前と同様に

$$[A|B]_1 \equiv A_1B_1K_{11} \vee A_1B_0K_{10} \vee A_0B_1K_{01} \vee A_0B_0K_{00} \qquad (5.2)!$$

と置くと

$$(5.2) \to \Big[[(5.0)\text{左辺}]$$
$$\leftrightarrow \bigwedge_{l,m,n=0}^{1} [\mathfrak{A}_l\{(\mathfrak{B}_m\mathfrak{L}_nK_{mn})K_{l1} \vee \overline{K_{mn}}K_{l0}\} \to \mathfrak{L}_n]$$
$$\leftrightarrow \bigwedge_{l,m,n} [\overline{\mathfrak{A}_l} \vee K_{mn}\overline{K_{l1}} \vee \overline{K_{mn}}\,\overline{K_{l0}} \vee \mathfrak{L}_n]$$
$$\leftrightarrow K_{00}\overline{K_{11}} \vee \overline{K_{00}}\,\overline{K_{10}} \qquad (5.3)!!\Big].$$

次に(5.1)式における$X_hY_kZ_lU_mV_n$の係数の関係は

$$(5.2) \to \Big[(5.3)[(5.1)\text{左辺}]$$
$$\leftrightarrow (K_{00}\overline{K_{11}} \vee \overline{K_{00}}\,\overline{K_{10}}) \bigwedge_{h,k,l,m,n=0}^{1} \Big[(K_{kl}K_{h1} \vee \overline{K_{kl}}K_{h0})$$
$$\cdot\Big[(K_{mm}K_{m1} \vee \overline{K_{mm}}K_{m0})$$
$$\cdot\{(K_{nk}K_{hn} \vee K_{nk}K_{00} \vee K_{10})K_{11} \vee (K_{nk}K_{hn} \vee K_{nk}\overline{K_{00}} \vee \overline{K_{nk}}K_{00})K_{10}\}$$
$$\vee (K_{mm}\overline{K_{m1}} \vee \overline{K_{mm}}\,\overline{K_{m0}})$$
$$\cdot[\{K_{hn}K_{01} \vee K_{nk}K_{01}(K_{10} \vee K_{00}) \vee \overline{K_{nk}}K_{hn}K_{00} \vee \overline{K_{nk}}K_{00}(K_{01} \vee \overline{K_{10}})\}K_{11}$$
$$\vee\{K_{nk}K_{hn}\overline{K_{01}} \vee K_{nk}\overline{K_{01}}(\overline{K_{00}} \vee \overline{K_{11}}) \vee \overline{K_{nk}}K_{hn}(\overline{K_{11}}\,\overline{K_{00}} \vee \overline{K_{11}}\,\overline{K_{01}} \vee \overline{K_{00}}\,\overline{K_{01}})$$

$$\vee\overline{K_{nk}}\,\overline{K_{hn}}(\overline{K_{00}}\vee\overline{K_{01}})\}K_{10}]\,)$$

$$\vee(K_{kl}\overline{K_{h1}}\vee\overline{K_{kl}}\,\overline{K_{h0}})$$

$$\cdot[(K_{mm}K_{m1}\vee\overline{K_{mm}}K_{m0})$$

$$\cdot\{K_{01}(K_{nk}K_{hn}K_{11}\vee K_{nk}\overline{K_{hn}}K_{10}K_{00}\vee K_{nk}K_{00}K_{11}\vee K_{10}K_{11}\vee\overline{K_{nk}}K_{10}\overline{K_{00}})$$

$$\vee K_{00}(K_{hn}K_{11}\vee\overline{K_{10}}\,\overline{K_{11}}\vee\overline{K_{nk}})\}$$

$$\vee(K_{mm}\overline{K_{m1}}\vee\overline{K_{mm}}\,\overline{K_{m0}})$$

$$\cdot\{(K_{nk}K_{10}\vee K_{hn}K_{11}\vee K_{00})K_{01}\vee(K_{nk}K_{hn}K_{10}\vee K_{nk}K_{11}$$

$$\vee\overline{K_{nk}}K_{hn}\overline{K_{11}}\vee\overline{K_{nk}}\,\overline{K_{hn}}K_{10})\}K_{00}]] \qquad (5.4)!!\,).$$

$$(klh=001)\rightarrow[(mn=00)\rightarrow\{(5.4)\leftrightarrow K_{00}(K_{01}\vee K_{10}) \qquad (5.5)\}]$$

$$\cdot[(5.5)\,(mn=01)\rightarrow\{(5.4)\leftrightarrow K_{01} \qquad (5.6)\}]$$

$$\cdot[(5.5)(5.6)\,(mn=11)\rightarrow\{(5.4)\leftrightarrow K_{10} \qquad (5.7)\}].$$

これを（5．4）式に代入すると

$$(5.5)(5.6)(5.7)\rightarrow\{(5.4)\leftrightarrow\overline{K_{11}}K_{10}K_{01}K_{00} \qquad (5.8)!!\}.$$

が導かれるから

$$[A\,|\,B]_1=\overline{A}_1\vee\overline{B}_1 \qquad (5.9)!!$$

即ちNANDであることが判る。これを（5．1）式左辺に代入すると1となから，（5．9）式が検証される。

その他の演算は次の定義によって表わされる。

$$(\neg X)_1\equiv[X|X]=\overline{X}_1,\quad (X\cap Y)_1\equiv[(X|Y)|(X|Y)]_1\equiv X_1Y_1,$$

$$(X\cup Y)_1\equiv[(X|X)|(Y|Y)]_1\equiv X_1\vee Y_1.$$

$$(5.10)!!!$$

6 Wajsberg型 $(\overline{W}_3)$

$$\mathfrak{A}_1(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})_1\to\mathfrak{B}_1\equiv 1. \qquad (6.0)!!!$$

$$[X\supset(Y\supset X)]_1\equiv 1, \qquad (6.1)!!!$$

$$[(X\supset Y)\supset\{(Y\supset Z)\supset(X\supset Z)\}]_1\equiv 1, \qquad (6.2)!!!$$

$$[(\neg Y\supset\neg X)\supset(X\supset Y)]_1\equiv 1, \qquad (6.3)!!!$$

$$[\{(X\supset\neg X)\supset X\}\supset X]_1\equiv 1. \qquad (6.4)!!!$$

(6.0)式は推理の原則に相当し，(6.1)乃至(6.4)式は公理。[(2)]

〔6.0〕真理値1，0を用いると，前と同様にして

$$\left.\begin{aligned}(A\supset B)_1&\equiv A_1B_1I_{11}\vee A_1B_0I_{10}\vee A_0B_1I_{01}\vee A_0B_0I_{00},\\(\neg A)_1&\equiv A_1N_1\vee A_0N_0\end{aligned}\right\}\qquad (6.5)!$$

と置くと，(6.5)第1式と(6.0)式とより

$$(6.5)\to\Big[[(6.0)\text{左辺}]\leftrightarrow\overline{I}_{10}\qquad (6.6)!!\Big].$$

$$(6.5)\to\Big\{(6.6)[(6.1)\text{左辺}]\leftrightarrow\overline{I}_{10}\bigwedge_{l,m}(I_{ml}I_{l1}\vee\overline{I}_{ml}I_{l0})$$
$$\leftrightarrow I_{11}\overline{I}_{10}I_{01}I_{00}\qquad (6.7)!!\Big\}.$$

これより

$$(A\supset B)_1=A_0\vee B_1\qquad (6.8)!!$$

これを(6.2)式に入れれば1となる。

$$(6.5)\to\Big\{(6.7)[(6.3)\text{左辺}]\leftrightarrow I_{11}\overline{I}_{10}I_{01}I_{00}\bigwedge_{l,m}(I_{lm}\vee N_m\overline{N}_l)$$
$$\leftrightarrow I_{11}\overline{I}_{10}I_{01}I_{00}\overline{N}_1N_0\qquad (6.9)!!\Big\}.$$

これより

$$(\neg A)_1=A_0.\qquad (6.10)!!$$

[6・1] 真理値0の代りに2, 3 を用いると

$$
\left.\begin{aligned}
(A \supset B)_1 \equiv\ & A_1(B_1 I_{11} \vee B_2 I_{12} \vee B_3 I_{13}) \\
& \vee A_2(B_1 I_{21} \vee B_2 I_{22} \vee B_3 I_{23}) \\
& \vee A_3(B_1 I_{31} \vee B_2 I_{23} \vee B_3 I_{33}), \\
(A \supset B)_2 \equiv\ & \bigvee_{l,m=1}^{3} A_l B_m J_{lm}, \\
(A \supset B)_3 \equiv\ & \bigvee_{l,m=1}^{3} A_l B_m \overline{I_{lm}}\,\overline{J_{lm}};
\end{aligned}\right\} \quad (6.11)!
$$

$$
\left.\begin{aligned}
(\neg A)_1 &\equiv A_1 N_1 \vee A_2 N_2 \vee A_3 N_3, \\
(\neg A)_2 &\equiv A_1 M_1 \vee A_2 M_2 \vee A_3 M_3, \\
(\neg A)_3 &\equiv A_1 \overline{N_1}\,\overline{M_1} \vee A_2 \overline{N_2}\,\overline{M_2} \vee A_3 \overline{N_3}\,\overline{M_3}
\end{aligned}\right\} \quad (6.12)!
$$

と置く。同じ $A_l B_m$ に対して同時に $I_{lm}=J_{lm}=1$ となることはない。また N_l, M_l についても同様で,

$$
\left.\begin{aligned}
& I_{lm} J_{lm} = 0, \quad N_l M_l = 0, \\
& I_{lm} \overline{J_{lm}} = I_{lm}, \quad \overline{I_{lm}} J_{lm} = J_{lm}, \\
& N_l \overline{M_l} = N_l, \quad \overline{N_l} M_l = M_l.
\end{aligned}\right\} \quad (6.13)!!
$$

(6.6) 式の $\overline{I_{10}}$ に相当する関係は

$$
(6.11) \to [[(6.0)\text{左辺}] \leftrightarrow \bigwedge_{l,m=1}^{3} (\overline{\mathfrak{A}_1} \vee \mathfrak{A}_l \mathfrak{B}_m \overline{I_{lm}} \vee \mathfrak{B}_1)
$$

$$
\leftrightarrow \overline{I_{12}}\,\overline{I_{13}} \quad (6.14)!!].
$$

$$
(6.11) \to [\overline{I_{12}}\,\overline{I_{13}}[(6.1)\text{左辺}]
$$

$$
\leftrightarrow \overline{I_{12}}\,\overline{I_{13}}(I_{ml} I_{l1} \vee J_{ml} I_{l2} \vee \overline{I_{ml}}\,\overline{J_{ml}} I_{l3}) \quad (6.15)!!].
$$

(6.5) 式と (6.11) 式とを比較すると, (6.5) 第2項は

$$
A_1 B_0 I_0 = A_1 B_2 I_{12} \vee A_1 B_3 I_{13} \quad (6.16)
$$

の関係があるから(6.6)式の$\overline{I}_{10}$なる条件が(6.14)式の$\overline{I}_{12}\overline{I}_{13}$となるのは当然である。

$$(6.11) \to \left[(6.15)\left[(6.2)\text{左辺}\right]\right.$$

$$\leftrightarrow (6.15) \bigwedge_{l,m,n=1}^{3} \Big[\{ I_{ln} \vee (J_{mn} I_{22} \vee \overline{I}_{mn}\overline{J}_{mn} I_{32}) J_{ln}$$
$$\vee (J_{mn} I_{23} \vee \overline{I}_{mn}\overline{J}_{mn} I_{33})\overline{J}_{ln}\}$$
$$\vee (J_{lm} I_{22} \vee \overline{I}_{lm}\overline{J}_{lm} I_{32})\{(I_{mn} J_{12} \vee \overline{I}_{mn}\overline{J}_{mn} J_{32}) J_{ln}$$
$$\vee (I_{mn} J_{13} \vee J_{mn} J_{23} \vee \overline{I}_{mn}\overline{J}_{mn} J_{33})\overline{J}_{ln}\}$$
$$\vee (J_{lm} I_{23} \vee \overline{I}_{lm}\overline{J}_{lm} I_{33})\{(I_{mn}\overline{J}_{12} \vee J_{mn}\overline{I}_{22} \vee \overline{I}_{mn}\overline{J}_{mn}\overline{I}_{32}\overline{J}_{32}) J_{ln}$$
$$\vee (I_{mn}\overline{J}_{13} \vee J_{mn}\overline{I}_{23}\overline{J}_{23})\overline{J}_{ln}\}\Big]$$

$$\leftrightarrow I_{11}\overline{I}_{12}\overline{I}_{13} I_{21} I_{31}\overline{J}_{11}\overline{J}_{21}\overline{J}_{31}\overline{J}_{22}$$
$$\cdot (J_{12} I_{22} \vee \overline{J}_{12} I_{23} J_{33})(J_{13} I_{22} I_{32} \vee \overline{J}_{13} I_{33})$$
$$\cdot (J_{12} \vee \overline{J}_{32})(I_{22} \vee I_{32} J_{33})(I_{33} \vee J_{33})$$
$$\cdot (I_{22} \vee \overline{I}_{32} \vee \overline{I}_{23})(I_{23} \vee J_{23} \vee I_{33})$$
$$\cdot (I_{32} \vee J_{32} \vee I_{23})(I_{33} \vee \overline{I}_{23} \vee J_{32})$$
$$\cdot \{ I_{23} \vee (J_{13} \vee I_{32}) J_{23} \vee \overline{J}_{13} I_{33}\overline{J}_{23}\}$$
$$\cdot \Big[\overline{J}_{12} I_{33} I_{23} \vee J_{13}\{ J_{23} I_{22} \vee \overline{I}_{23}\overline{J}_{23} I_{32} \vee J_{12} I_{22}(I_{23} \vee J_{32}) \vee \overline{J}_{12} I_{33} J_{23}\}$$
$$\vee \overline{J}_{13}\{\overline{I}_{23}\overline{J}_{23} I_{33} \vee J_{12}(J_{23} \vee \overline{I}_{32}\overline{J}_{32} \vee I_{23})\}\Big]$$
$$\cdot \Big[J_{32} \vee \overline{I}_{32} I_{33}\overline{J}_{12} \vee I_{22} I_{32} \vee I_{23}\overline{I}_{32} J_{12}$$
$$\vee J_{13} I_{22} J_{33}\overline{J}_{12} \vee \overline{J}_{13}(J_{12} \vee I_{32})\Big]$$

$\leftrightarrow$ (次頁)

I_{11}	J_{11}	I_{12}	J_{12}	I_{13}	J_{13}	I_{21}	J_{21}	I_{22}	J_{22}	I_{23}	J_{23}	I_{31}	J_{31}	I_{32}	J_{32}	I_{33}	J_{33}	
1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	(1)
1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	(2)
1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	(3)
1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	(4)
1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	(5)
1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	(6)
1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	(7)
1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	(8)
1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	(9)
1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	(10)
1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	(11)

(6.17)!!

上記の(6・17)(1)乃至(11)の解が導かれる。しかし，まだ(6.3),(6.4)式の両公理が残っているので，次の(6.18),(6.19)両式が両公理に基づく条件となる。

$$(6.11)(6.12)\to\Big[(6.17)[(6.4)\text{左辺}]$$

$$\leftrightarrow \bigwedge_{\ell=1}^{3}\Big[(N_\ell \vee M_\ell I_{\ell 2} \vee \overline{M_\ell} I_{\ell 3})(I_{1\ell} \vee J_{1\ell} I_{2\ell} \vee \overline{J_{1\ell}} I_{3\ell})$$
$$\vee (M_\ell J_{\ell 2} \vee \overline{N_\ell}\,\overline{M_\ell} J_{\ell 3})(I_{2\ell} I_{1\ell} \vee \overline{I_{2\ell}}\,\overline{J_{2\ell}} I_{3\ell})$$
$$\vee (M_\ell \overline{I_{\ell 2}}\,\overline{J_{\ell 2}} \vee \overline{N_\ell}\,\overline{M_\ell}\,\overline{I_{\ell 3}}\,\overline{J_{\ell 3}})(I_{3\ell} I_{1\ell} \vee J_{3\ell} I_{2\ell})\Big]$$
$$(6.18)!!\Big].$$

$$(6.11)(6.12)\to\Big[(6.17)[(6.3)\text{左辺}]$$

$$\leftrightarrow \bigwedge_{\ell, m=1}^{3}\Big[\big[N_\ell \vee M_m(M_\ell I_{22} \vee \overline{M_\ell} I_{23}) \vee \overline{N_m}\,\overline{M_m}(M_\ell I_{32} \vee \overline{M_\ell} I_{33})\big] I_{\ell m}$$
$$\vee \big[N_m(M_\ell J_{12} \vee \overline{N_\ell}\,\overline{M_\ell} J_{13}) \vee M_m \overline{N_\ell}\,\overline{M_\ell} J_{23}$$
$$\vee\, \overline{N_m}\,\overline{M_m}(M_\ell J_{32} \vee \overline{N_\ell}\,\overline{M_\ell} J_{33})\big](I_{\ell m} \vee J_{\ell m} I_{22} \vee \overline{J_{\ell m}} I_{23})$$
$$\vee \big[N_m(M_\ell \overline{J_{12}} \vee \overline{N_\ell}\,\overline{M_\ell}\,\overline{J_{13}}) \vee M_m(M_\ell \overline{I_{22}} \vee \overline{N_\ell}\,\overline{M_\ell}\,\overline{I_{23}}\,\overline{J_{23}})$$
$$\vee\, \overline{N_m}\,\overline{M_m}(M_\ell \overline{I_{32}}\,\overline{J_{32}} \vee \overline{N_\ell}\,\overline{M_\ell}\,\overline{I_{33}}\,\overline{J_{33}})\big]$$
$$\cdot (I_{\ell m} \vee J_{\ell m} I_{32} \vee \overline{J_{\ell m}} I_{33})\Big] \qquad (6.19)!!\Big].$$

これに(6.17)式で示される解を入れると太字の解(1),(7),(2),(4),(8)だけが(6.18),(6.19)式を満足し，他の解では(6.18)又は(6.19)式が0となるのである。

$$(6.11)(6.12)\to$$

$$\Big[(6.18)(6.19) \leftrightarrow (1)(\overline{N_1} N_2 N_3 M_1 \overline{M_2}\,\overline{M_3} \vee \overline{N_1} N_2 N_3 \overline{M_1}\,\overline{M_2}\,\overline{M_3})$$
$$\vee\ (2)(\overline{N_1} N_2 N_3 M_1 \overline{M_2}\,\overline{M_3} \vee \overline{N_1} N_2 N_3 \overline{M_1}\,\overline{M_2}\,\overline{M_3})$$
$$\vee\ (4)(\overline{N_1}\,\overline{N_2} N_3 \overline{M_1} M_2 \overline{M_3})$$
$$\vee (7)(\overline{N_1} N_2 \overline{N_3} M_1 \overline{M_2}\,\overline{M_3}) \vee\ (8)(\overline{N_1} N_2 N_3 M_1 \overline{M_2}\,\overline{M_3} \vee \overline{N_1} N_2 N_3 \overline{M_1}\,\overline{M_2}\,\overline{M_3})$$
$$(6.20)!!\Big]$$

なる完全な解が求められた。次に、これまでの結果を総括する。

7 総括

[C_2-1] $\mathfrak{A}_1(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})_1\to\mathfrak{B}_1\equiv 1.$

$$[(X\cup X)\supset X]_1\equiv 1,$$
$$[X\supset(X\cup Y)]_1\equiv 1,$$
$$[(X\cup Y)\supset(Y\cup X)]_1\equiv 1,$$
$$[(X\supset Y)\supset\{(Z\cup X)\supset(Z\cup Y)\}]_1\equiv 1.$$

解 $(A\supset B)_1=A_0\vee B_1=A_1\to B_1,\ (A\cup B)_1=A_1\vee B_1.$

定義 $(\neg A\cup B)_1\equiv A_1\to B_1.$

$A\supset B$

A \ B	T 1	F 0
T 1	1	0
F 0	1	1

$A\cup B$

A \ B	T 1	F 0
T 1	1	1
F 0	1	0

$\neg A$

A	$\neg A$
T 1	0
F 0	1

[C_2-2] $\mathfrak{A}_1(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})_1\to\mathfrak{B}_1\equiv 1.$

$$[(\neg X\supset X)\supset X]_1\equiv 1,$$
$$[X\supset(\neg X\supset Y)]_1\equiv 1,$$
$$[(X\supset Y)\supset\{(Y\supset Z)\supset(X\supset Z)\}]_1\equiv 1.$$

解 $(A\supset B)_1=A_0\vee B_1=A_1\to B_1,\ (\neg A)_1=A_0=\overline{A_1}.$

表は C_2-1 と同じ。

[S_2]　$\mathfrak{A}_1\{\mathfrak{A}|(\mathfrak{B}|\mathfrak{C})\}_1 \to \mathfrak{C}_1 \equiv 1.$

$[\{X|(Y|Z)\}|[\{U|(U|U)\}|\{(V|Y)|((X|V)|(X|V))\}]]_1 \equiv 1.$

解　$[A|B]_1 = A_0 \vee B_0 = \overline{A_1} \vee \overline{B_1}.$

定義　$(\neg X)_1 \equiv (X|X)_1 \equiv \overline{X_1},$

$(X \cap Y)_1 \equiv [(X|Y)|(X|Y)]_1 \equiv X_1 Y_1,$

$(X \cup Y)_1 \equiv [(X|X)|(Y|Y)]_1 \equiv X_1 \vee Y_1.$

表は C_2-1 と同じ。

[W_3]　$\mathfrak{A}_1(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})_1 \to \mathfrak{B}_1 \equiv 1.$

$[X \supset (Y \supset X)]_1 \equiv 1,$

$[(X \supset Y) \supset \{(Y \supset Z) \supset (X \supset Z)\}]_1 \equiv 1,$

$[(\neg Y \supset \neg X) \supset (X \supset Y)]_1 \equiv 1,$

$[\{(X \supset \neg X) \supset X\} \supset X]_1 \equiv 1.$

解[0]　$(A \supset B)_1 = A_0 \vee B_1 = A_1 \to B_1, (\neg A)_1 = A_0 = \overline{A_1}.$

表は C_2-1 と同じ。

[1]　$(A \supset B)_1 = \overline{A_1} \vee B_1,\ (A \supset B)_2 = A_1 \overline{B_1}.$

(6.17)(1)

$A \supset B$

A \ B	T 1	F 2	I 3
T 1	1	2	2
F 2	1	1	1
I 3	1	1	1

[1.1] $(\neg A)_1=\overline{A_1}$, $(\neg A)_2=A_1$. [1.2] $(\neg A)_1=\overline{A_1}$, $(\neg A)_2=0$.

A	$\neg A$
T 1	2
F 2	1
I 3	1

A	$\neg A$
T 1	3
F 2	1
I 3	1

[2] $(A\supset B)_1=\overline{A_1}\vee B_1$, $(A\supset B)_2=0$.

(6.17)(2)

$A\supset B$

A \ B	T 1	I 2	F 3
T 1	1	3	3
I 2	1	1	1
F 3	1	1	1

これは[1]の2と3とを入れかえた形で，実質的には同じである。

[2.1] $(\neg A)_1=\overline{A_1}$, $(\neg A)_2=A_1$. [2.2] $(\neg A)_1=\overline{A_1}$, $(\neg A)_2=0$.

A	$\neg A$
T 1	2
I 2	1
F 3	1

A	$\neg A$
T 1	3
I 2	1
F 3	1

[3] $(A \supset B)_1 = \overline{A_1} \vee B_1$, $(A \supset B)_2 = A_1 B_2$.

(6.17)(8)

$A \supset B$

B \ A	T 1	F 2	I 3
T 1	1	2	3
F 2	1	1	1
I 3	1	1	1

[3.1] $(\neg A)_1 = \overline{A_1}$, $(\neg A)_2 = A_1$.　[3.2] $(\neg A)_1 = \overline{A_1}$, $(\neg A)_2 = 0$.

A	$\neg A$
T 1	2
F 2	1
I 3	1

A	$\neg A$
T 1	3
F 2	1
I 3	1

[4] $(A \supset B)_1 = B_1 \vee \overline{A_1}(B_2 \vee \overline{A_2})$, $(\neg A)_1 = \overline{A_1}\,\overline{A_2} = A_3$,

(6.17)(4) $(A \supset B)_2 = A_1 B_2 \vee A_2 \overline{B_1}\,\overline{B_2}$. $(\neg A)_2 = A_2$.

$A \supset B$

B \ A	T 1	I 2	F 3
T 1	1	2	3
I 2	1	1	2
F 3	1	1	1

$\neg A$

A	$\neg A$
T 1	3
I 2	2
F 3	1

上記の解のうち[0]は二値論理型である。[1],[2]は実質的には互に同じである。[3]は[0]に極く近い三値論理である。[4]は純粋な三値論理型である。[4]の2と3とを置換

8 引用文献

(1) 後藤以紀：多値論理概説，数理解析研究所講究録 81 p.1－32，1970年3月.

(2) N. Rescher : *Many-Valued Logic*, 1969, McGraw-Hill.

(3) D. L. Webb: *Generation of Any N-valued Logic By One Binary Operation*, Proc. of National Academy of Sciences of the USA, vol. 21, 1935, p.252.

(4) N. M. Martin : The Sheffer Functions of 3-Valued Logic, J. Symbolic Logic, 19, 1 (March 1954).

(1) 正誤表

頁	正	誤
28		第4.4図
第4.4図	第4.4図（$w_1=1$の場合）	括弧内脱落

したものが[5]で実質的には同じである。

[5] $(A \supset B)_1 = B_1 \vee A_2 \vee \bar{A}_1 \bar{B}_2$, $(\neg A)_1 = A_2$,

(6.17)(7) $(A \supset B)_2 = A_1 B_2$. $(\neg A)_2 = A_1$.

$A \supset B$

A \ B	T 1	F 2	I 3
T 1	1	2	3
F 2	1	1	1
I 3	1	3	1

A	$\neg A$
T 1	2
F 2	1
I 3	3